Comportements collectifs : quantons identiques

1) Systèmes composés

. Le principe de factorisation composé :

Pour un système quantique composé effectuant une transition entre deux états caractérisés par des états individuels de ses composants, l'amplitude de probabilité de la transition est le produit des amplitudes de probabilité des transitions de chacun des sous systèmes.

Si $p^{(1)}$ ($q^{(1)}$) est l'état initial du quanton 1 (2) et $r^{(1)}$ ($s^{(2)}$) l'état final de ce quanton, alors on a : $\langle r^{(1)} s^{(1)} | p^{(1)} q^{(1)} \rangle = \langle r^{(1)} | p^{(1)} \rangle \langle s^{(2)} | q^{(1)} \rangle$

. Limite de validité du principe de factorisation composé

Des quantons identiques, mêmes libres, ne sont pas indépendants

. Description collective des systèmes composés.

Il est impossible, en général, de décrire l'état d'un système quantique composé en terme d'états individuels de ses composants.

2) Systèmes de deux quantons identiques

Amplitude à deux quantons identiques

- Symétrie et antisymétrie. ψ : état d'un système de deux quantons.

on définit la probabilité de transition $(r,s) \leftarrow \psi$: $P_{r,s\leftarrow\psi} = |\langle r,s|\psi\rangle|^2$

on a pour des quantons distincts : $P_{r^1,s^2\leftarrow\psi} \neq P_{s^1,r^2\leftarrow\psi} \Rightarrow |\langle r^1,s^2|\psi\rangle| \neq |\langle s^1,r^2|\psi\rangle|$

on a pour des quantons identiques : $P_{r,s\leftarrow\psi} = P_{s,r\leftarrow\psi} \Rightarrow |\langle r,s|\psi\rangle| = |\langle s,r|\psi\rangle|$

donc $\langle r,s|\psi\rangle = e^{i\alpha}\langle s,r|\psi\rangle = e^{2i\alpha}\langle r,s|\psi\rangle \Rightarrow e^{2i\alpha} = 1 \Rightarrow e^{i\alpha} = \pm 1$

d'où si $e^{i\alpha} = 1$ on a symétrie $\langle r,s|\psi\rangle = \langle s,r|\psi\rangle$ et si $e^{i\alpha} = -1$ on a antisymétrie $\langle r,s|\psi\rangle = -\langle s,r|\psi\rangle$

Lorsqu'on a symétrie on a à faire à des Bosons, et lorsqu'on a antisymétrie à des Fermions

- Une question de phase. on a plus précisément : $\langle s,r|\psi\rangle = e^{i\alpha(s,r)}\langle r,s|\psi\rangle$

donc $\langle r,s|\psi\rangle = e^{i\alpha(r,s)}\langle s,r|\psi\rangle = e^{i(\alpha(r,s)+\alpha(s,r))}\langle r,s|\psi\rangle$ a à priori $\alpha(r,s) \neq \alpha(s,r)$

on pose $A = A(r,s) = \langle r,s|\psi\rangle$; $\alpha(r,s) = \alpha$ et $A' = A'(s,r) = \langle s,r|\psi\rangle$; $\alpha(s,r) = \alpha'$

d'où $A = e^{i\alpha} A'$, $A' = e^{i\alpha'} A \Rightarrow e^{i(\alpha+\alpha')} = 1$. On définit $B(r,s) = e^{-i\alpha/2}.A(r,s)$ d'où $B(s,r) = e^{i(\alpha+\alpha')/2} B(r,s) \Rightarrow B(s,r) = \pm B(r,s)$ (car $e^{i(\alpha+\alpha')} = 1$).

Ce n'est pas l'amplitude A qui est nécessairement (anti)symétrique, mais B, l'une des amplitudes équivalentes.

- Amplitudes collectives et états individuels.

on a pour des quantons différents : $P^{\neq} = |\langle s,r|p,q\rangle|^2 + |\langle r,s|p,q\rangle|^2$ soit encore $P^{\neq} = P_{sr\leftarrow pq} + P_{rs\leftarrow pq}$.

pour des quantons identiques on aura : $A^{\equiv} = A_{sr\leftarrow pq} + A_{rs\leftarrow pq}$ avec pour les amplitudes : $A_{rs\leftarrow pq} = e^{i\beta}\langle r,s|p,q\rangle$ et $A_{s,r\leftarrow pq} = e^{i\gamma}\langle s,r|p,q\rangle$ où $e^{i\beta}$ et $e^{i\gamma}$ sont des facteurs de phase.

pour des bosons (symétrie) on a donc $\langle r,s|p,q\rangle_b = \langle r,s|p,q\rangle + \langle s,r|p,q\rangle$

pour des fermions (antisymétrie) on a donc $\langle r,s|p,q\rangle_f = \langle r,s|p,q\rangle - \langle s,r|p,q\rangle$

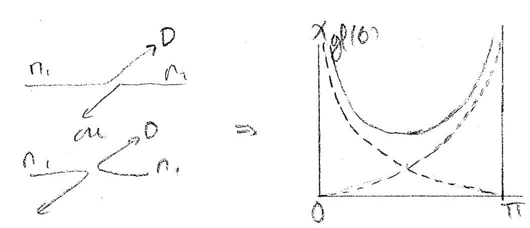
Nous en déduisons la relation : $\langle r,s|p,q\rangle_{\substack{b\\f}} = \langle r|p\rangle\langle s|q\rangle \pm \langle r|q\rangle\langle s|p\rangle$

Nous avons donc : $\langle s,r|p,q\rangle_{\substack{b\\f}} = \pm\langle r,s|p,q\rangle_{\substack{b\\f}}$; et : $\langle r,s|q,p\rangle_{\substack{b\\f}} = \pm\langle r,s|p,q\rangle_{\substack{b\\f}}$

. Diffusion de deux quantons

θ : angle de diffusion ; $f(\theta)$: amplitude de diffusion ; $X(\theta) = |f(\theta)|^2$ section efficace différentielle.

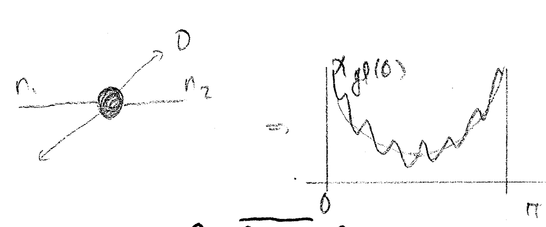
- Pour deux quantons différents.



on aura : $X^{\neq}_{gl}(\theta) = X(\theta) + X(\pi-\theta)$

soit : $X^{\neq}_{gl}(\theta) = |f(\theta)|^2 + |f(\pi-\theta)|^2$

- Pour deux quantons identiques.



Bosons : $X_b(\theta) = |f(\theta) + f(\pi-\theta)|^2$

Fermions : $X_f(\theta) = |f(\theta) - f(\pi-\theta)|^2$

Donc plus généralement : $X_{\substack{b\\f}}(\theta) = X(\theta) + X(\pi-\theta) \pm 2\mathrm{Re}\,\overline{f(\theta)}\,f(\pi-\theta)$

on a donc un terme d'interférence dépendant de la phase de l'amplitude $f(\theta)$

- Diffusion coulombienne. On a $f_c(\theta) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4E}\frac{e^{-i\zeta(\theta)}}{\sin^2(\theta/2)}$ donc $X_c(\theta) = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4E}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)}$

d'où : $X^{\neq}_{gl}(\theta) = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4E}\right)^2 \left(\frac{1}{\sin^4\theta/2} + \frac{1}{\cos^4\theta/2}\right)$ pour deux quantons différents.

Un quanton de spin s possède $2s+1$ états de spin différents suivant la valeur propre $m\hbar$ ($m=-s,-s+1,\dots,s-1,s$) de l'une des composantes de son vecteur spin

- On considère la diffusion coulombienne de deux fermions de spin $\frac{1}{2}$. Chaque quanton a deux états de spin possibles, correspondant aux valeurs propres $\pm\frac{\hbar}{2}$ d'une composante de son vecteur spin. On a quatre cas à considérer:

état initial $\uparrow\uparrow$ $\Rightarrow$ $\chi_c^{\uparrow\uparrow}(\theta)=|f_c(\theta)-f_c(\pi-\theta)|^2$ — 2 fermions identiques

état initial $\uparrow\downarrow$ $\Rightarrow$ $\chi_c^{\uparrow\downarrow}(\theta)=|f_c(\theta)|^2+|f_c(\pi-\theta)|^2$ — 2 fermions $\neq$

état initial $\downarrow\uparrow$ $\Rightarrow$ $\chi_c^{\downarrow\uparrow}(\theta)=|f_c(\theta)|^2+|f_c(\pi-\theta)|^2$ — 2 fermions $\neq$

état initial $\downarrow\downarrow$ $\Rightarrow$ $\chi_c^{\downarrow\downarrow}(\theta)=|f_c(\theta)-f_c(\pi-\theta)|^2$ — 2 fermions identiques

on aura donc: $\chi_c^{\text{non polarisé}}(\theta)=\frac{1}{4}\left(\chi_c^{\uparrow\uparrow}(\theta)+\chi_c^{\uparrow\downarrow}(\theta)+\chi_c^{\downarrow\uparrow}(\theta)+\chi_c^{\downarrow\downarrow}(\theta)\right)$

soit: $\chi_c^{\text{non polarisé}}(\theta)=|f_c(\theta)|^2+|f_c(\pi-\theta)|^2-\mathrm{Re}\,\overline{f_c(\theta)}\,f_c(\pi-\theta)$

3) Systèmes à N quantons identiques

. Amplitudes à N quantons. Quantons composés

- On a $\langle r_1 r_2\dots r_j\dots r_i\dots r_N|\psi\rangle_{b/f}=\pm\langle r_1 r_2\dots r_i\dots r_j\dots r_N|\psi\rangle_{b/f}$

pour des Bosons: $\langle P(r_1\dots r_N)|\psi\rangle_b=\langle r_1\dots r_N|\psi\rangle_b$; P: permutation

pour des Fermions. $\langle P(r_1\dots r_N)|\psi\rangle_f=\varepsilon_p\langle r_1\dots r_N|\psi\rangle_f$; ε_p parité de la permutation

Les amplitudes bosoniques (fermioniques) sont totalement symétriques (antisymétriques)

- On prend un système de deux deutérons. ψ: état quelconque du système.

R et S: deux états à un deutéron. (Deutéron: un proton et un neutron)

Si r et r' sont des états à un proton, et s et s' des états à un neutron; ψ est spécifié par les états individuels (r,r',s,s') des quatres nucléons. On a quatre modalités, indiscernables, de la transition:

$(r,s)\leftarrow R$ et $(r',s')\leftarrow S$; $(r,s')\leftarrow R$ et $(r',s)\leftarrow S$; $(r',s)\leftarrow R$ et $(r,s')\leftarrow S$; $(r',s')\leftarrow R$ et $(r,s)\leftarrow S$

Si $\eta_1\,\eta_2\,\eta_3$ et η_4 sont des facteurs de phase on a alors l'amplitude totale.

$\langle rr'ss'|RS\rangle=\eta_1\langle rs|R\rangle\langle r's'|S\rangle+\eta_2\langle rs'|R\rangle\langle r's|S\rangle+\eta_3\langle r's|R\rangle\langle rs'|S\rangle+\eta_4\langle r's'|R\rangle\langle rs|S\rangle$

or neutrons et protons sont des fermions, donc: $\langle r r' s s'|RS\rangle=-\langle r'rss'|RS\rangle$ et

$\langle rr'ss'|RS\rangle=-\langle rr's's|RS\rangle$ d'où on en déduit: $\eta_1=-\eta_3=-\eta_2$ et $\eta_2=-\eta_4=\eta_3$

on prend $\eta_1=1$. On en déduit alors: $\langle rr'ss'|RS\rangle=\langle rr'ss'|SR\rangle$

On en conclu que le deutéron est un Boson.

. Un quantum composé est un fermion si et seulement si le nombre de fermions parmi ses constituants est impair

. Quelques exemples

- l'azote 14 et le neutron. La statistique d'un noyau est uniquement fixée par la parité de son nombre de masse A. Pour l'azote $A=14$ donc l'azote 14 est un boson.
- les deux héliums. ${}^3_2He$ $(A=3)$ est un fermion ${}^4_2He$ $(A=4)$ un boson
- les quarks. Ce sont des fermions

. Spin et statistique

On a une connexion Spin - Statistique :

- quanton de spin entier = Boson
- quanton de spin demi entier = Fermion

4) Fermions

. Le principe d'exclusion de Pauli

Un ensemble de fermions ne peut jamais occuper une configuration d'états individuels dont deux soient identiques.

Les amplitudes à N fermions sont totalement antisymétriques, donc on aura $\langle r_1 r_2 \dots r_j \dots r_i \dots r_N | \psi \rangle = - \langle r_1 r_2 \dots r_i \dots r_j \dots r_N | \psi \rangle$, on a si $r_i = r_j = s$

$\langle r_1 r_2 \dots s \dots s \dots r_N | \psi \rangle = 0$

. Conséquences spatiales. Inégalité de Heisenberg - Pauli.

On a à trois dimension : $\Delta p_x . \Delta x \geqslant \hbar$; $\Delta p_y . \Delta y \geqslant \hbar$; $\Delta p_z . \Delta z \geqslant \hbar$.

On considère un ensemble de N particules. on aura donc N domaines chacun de mesure $\hbar^3$

On aura $(\Delta p)^3 (\Delta l)^3 \geqslant N \hbar^3 \Rightarrow \Delta p \, \Delta l \geqslant N^{1/3} \hbar$ on posera $\hbar^f(N) = N^{1/3} \hbar$

(constante de Planck fermionique effective)

. Le principe de Pauli et la matière ordinaire

- La matière au détail : les atomes. Un atome : ${}^A_Z N$

Z électrons, Z protons, A-Z neutrons.

Avec H on a $E_Z \simeq - Z^3 E_H$ et $r_Z \simeq Z^{-1} a_0$

on prend $\hbar^{\delta}(Z) = Z^{1/3}\hbar$ d'où : $E_Z^{\delta} \simeq -Z^{7/3} E_H$ et $r_Z^{\delta} = Z^{-1/3} a_0$

- La matière en gros (matière traitée en physique macroscopique)

on considère un système neutre de N particules positives ($+q_e$) et N négatives ($-q_e$)

on aura : $E = E_{cin} + U$, $E_{cin} = N\dfrac{\hat{p}^2}{2M} + N\dfrac{\hat{p}^2}{2m} \simeq N\dfrac{\hat{p}^2}{2m}$, $U = -N\dfrac{e^2}{\rho}$

donc $E = N\dfrac{\hat{p}^2}{2m} - N\dfrac{e^2}{\rho}$. on a $pL \geqslant \hbar$, $L^3 = N\rho^3 \Leftrightarrow \rho = N^{-1/3}L$

on a donc : $E \geqslant N\dfrac{\hbar^2}{2m}\cdot\dfrac{1}{L^2} - N^{4/3}\dfrac{e^2}{L}$ $\rightarrow$ compromis optimal pour $L \simeq N^{-1/3} a_0$

d'où : $E_0(N) \simeq -N^{5/3} E_H$, $\rho = \dfrac{N}{L^3} \simeq N^2 \dfrac{1}{a_0^3}$, $\mathcal{E} = \dfrac{|E_0(N)|}{N} \simeq N^{2/3} E_H$

on prend $\hbar^{\delta} = N^{1/3}\hbar$ d'où : $L^{\delta} \simeq N^{1/3} a_0$; $\rho^{\delta} \simeq \dfrac{1}{a_0^3}$; $E_0^{\delta}(N) \simeq -N E_H$; $\mathcal{E} \simeq E_H$

- La matière en très gros (on fait intervenir l'interaction gravitationnelle)

on considère un système de taille caractéristique L ayant N atomes de masse M.

on a $U_{grav} \simeq -N^2\dfrac{GM^2}{L}$ (on avait $U_{el} \simeq -N^{4/3}\dfrac{e^2}{L}$) pour N petit $U_{grav} \ll U_{el}$

et $U_{el} \simeq U_{grav}$ pour $N_t \simeq \left(\dfrac{e^2}{GM^2}\right)^{3/2}$.

on a $E \simeq N^{5/3}\dfrac{\hbar^2}{2mL^2} - N^2\dfrac{GM^2}{L}$, E minimum pour $L \simeq N^{-1/3}\dfrac{\hbar^2}{GM^2 m}$

pour $N \simeq N_t$ on aura donc $L_t \simeq \left(\dfrac{e^2}{GM^2}\right)^{1/2}\dfrac{\hbar^2}{me^2}$ et $\mathcal{M}_t \simeq \left(\dfrac{e^2}{GM^2}\right)^{3/2} M$

. Conséquences énergétiques

- Niveau de Fermi . Système de N fermions indépendants.

Niveaux d'énergies : $\mathcal{E}_1 \leq \mathcal{E}_2 \leq \ldots \leq \mathcal{E}_k \leq \ldots \leq \mathcal{E}_N$. On a l'énergie de l'état fondamental : $E_{fond}^{N\,fermions} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \ldots + \mathcal{E}_N$ ($E_{fond}^{N\neq} = N\mathcal{E}_1 \leq E_{fond}^{N\,fermions}$)

L'état fondamental d'un système de N fermions indépendants de spin s est obtenu en remplissant un à un les niveaux individuels, par ordre d'énergie croissante, à raison de $(2s+1)$ fermions par niveau.

$\mathcal{E}_F$: Niveau de Fermi . Niveau individuel d'énergie maximum marquant la limite entre niveaux "occupés" et niveaux "vides".

Lorsque l'on a affaire à un pseudo continuum de niveaux on fait intervenir la densité d'états $\rho(\mathcal{E})$. $\mathcal{E}_F$ est alors déterminé par : $(2s+1)\int_0^{\mathcal{E}_F}\rho(\mathcal{E})\,d\mathcal{E} = N$

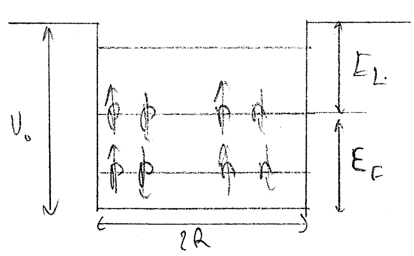
- Le gaz de Fermions libres . Système de N fermions libres sans interaction.

on a : $\rho(\mathcal{E}) = \dfrac{V}{2\pi^2}(2m^3\mathcal{E})^{1/2}$ d'où : $\mathcal{E}_F = \dfrac{1}{2m}\left(\dfrac{6\pi^2}{2s+1}\cdot\dfrac{N}{V}\right)^{2/3}$

energie totale du système dans son état fondamental : $E_0 = (2s+1)\int_0^{\mathcal{E}_F}\mathcal{E}\rho(\mathcal{E})\,d\mathcal{E} = \dfrac{3}{5}N.\mathcal{E}_F$

on a la pression de Fermi : $P_F = -\frac{\partial E_0}{\partial V} \Rightarrow P_F = \frac{2}{5}\frac{N}{V}\varepsilon_F$

- Le modèle de Fermi du noyau. Chaque nucléon est soumis à un potentiel nucléaire de rayon R et de profondeur U_0, et n'est pas en interaction avec les autres nucléons. (Nucléon = Protons + Neutrons)



Pour les noyaux légers stables $N_n = N_p$, donc $N_p = N_n = \frac{A}{2} = Z$. Il vient alors :
$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2M}\left(\frac{3\pi^2}{2}\frac{A}{V}\right)^{2/3}$ or $V = \frac{4}{3}\pi A r_0^3$
donc $\varepsilon_F = \frac{(9\pi)^{2/3}}{8}\frac{\hbar^2}{M r_0^2}$

Nous avons $U_0 = \varepsilon_F + E_L$.
Si $N_p \neq N_n$ alors $E_0 = \left(\frac{3^5\pi^4}{2^3}\right)^{1/3}\frac{\hbar^2}{5MV^{2/3}}(N_p^{5/3} + N_n^{5/3})$ or $N_p = Z$ et $N_n = A - Z$
dans le cas où $N_p = N_n = \frac{A}{2}$ alors $E_0(Z = \frac{A}{2}) = \frac{3}{5}A\varepsilon_F$ qui est la valeur minimale de l'énergie comme fonction de Z.
A l'ordre le plus bas on a en $\delta Z = Z - \frac{A}{2}$: $E_0(Z) = \frac{3}{5}A\varepsilon_F + \frac{4}{3A}\varepsilon_F(\delta Z)^2 + \dots$

5) Bosons.

. Le principe de grégarité de Panurge

- Système de N quantons différents on a N états individuels $(r_1, r_2, \dots, r_N)$. $(s_1, s_2, \dots, s_N)$ N états individuels (état final). On a l'amplitude de la transition : $\langle s_1 s_2 \dots s_N | r_1 r_2 \dots r_N\rangle = \langle s_1|r_1\rangle\langle s_2|r_2\rangle \dots \langle s_N|r_N\rangle$ d'où la probabilité : $P((s_1 s_2 \dots s_N) \leftarrow (r_1 r_2 \dots r_N)) = P(s_1 \leftarrow r_1) \cdot P(s_2 \leftarrow r_2) \cdot \dots \cdot P(s_N \leftarrow r_N)$

. Si on ne se préoccupe pas de savoir quel quanton est dans tel ou tel état individuel, le nombre des états finaux collectifs est N!, on aura alors la probabilité totale :

$P((s_1 s_2 \dots s_N) \leftarrow (r_1 r_2 \dots r_N)) = \sum_{N!\,\text{permutations}} P((s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_N}) \leftarrow (r_1 r_2 \dots r_N)) = \sum_{N!\,\text{perm.}} P(s_{i_1} \leftarrow r_1) P(s_{i_2} \leftarrow r_2) \dots P(s_{i_N} \leftarrow r_N)$

Dans le cas où $s_1 = s_2 = \dots = s_N = s$ alors $P((s s \dots s) \leftarrow (r_1 r_2 \dots r_N)) = \frac{1}{N!}\sum_{N!\,\text{perm.}} P(s \leftarrow r_1) P(s \leftarrow r_2) \dots P(s \leftarrow r_N)$
donc $P(s \leftarrow r) = P(s \leftarrow r_1) \cdot P(s \leftarrow r_2) \cdot \dots \cdot P(s \leftarrow r_N)$. On écrira : $P^{\neq}(N) = P_1 . P_2 \dots P_N$

- Système de N quantons identiques on fait la somme sur les amplitudes.
on a : $\langle s_1 s_2 \dots s_N | r_1 r_2 \dots r_N\rangle_b = \langle s_1|r_1\rangle\langle s_2|r_2\rangle \dots \langle s_N|r_N\rangle + \langle s_2|r_1\rangle\langle s_1|r_2\rangle \dots \langle s_N|r_N\rangle + \dots$
donc : $\langle s_1 s_2 \dots s_N | r_1 r_2 \dots r_N\rangle_b = \sum_{\text{perm.}} \langle s_{i_1}|r_1\rangle\langle s_{i_2}|r_2\rangle \dots \langle s_{i_N}|r_N\rangle$
d'où : $P^b((s_1 s_2 \dots s_N) \leftarrow (r_1 r_2 \dots r_N)) = |\langle s_1 s_2 \dots s_N | r_1 r_2 \dots r_N\rangle|^2$

Dans le cas où $s_1 = s_2 = \dots = s_N = s$ alors $\langle ss\dots s | r_1 r_2 \dots r_N\rangle = N! \langle s|r_1\rangle\langle s|r_2\rangle \dots \langle s|r_N\rangle$

donc : $P^b_{((ss\dots s)\leftarrow(r_1 r_2 \dots r_N))} = \frac{1}{N!}(N!)^2 |\langle s|r_1\rangle|^2 |\langle s|r_2\rangle|^2 \dots |\langle s|r_N\rangle|^2$

on écrira : $P^b(N) = N!\, P_1 . P_2 \dots . P_N$

. Quelques exemples

- Superfluidité et fluides quantiques. C'est la cohérence due à la factorielle bosonique qui explique la superfluidité de l'Helium liquide (^4He). Dans le fluide d'Helium, de masse volumique μ, chaque atome, de masse m, occupe un volume moyen $V = \frac{m}{\mu}$ et peut être considéré comme confiné dans un domaine de dimensions linéaires a telles que $v \simeq a^3$. L'état fondamental a l'énergie cinétique moyenne : $\mathcal{E}_0 = \frac{\tilde{p}^2}{2m}$ or $\tilde{p}.a \simeq \hbar$ donc $\mathcal{E}_0 \simeq \frac{\hbar^2}{2ma^2} \simeq \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\mu}{m}\right)^{2/3}$. La température T_b au dessous de laquelle vont se manifester les effets de la cohérence bosonique est telle que $kT_b \simeq \mathcal{E}_0$

- Transitions induites et Lasers

. Dans le cas de quantons distincts on a $P^{\neq}(N+1) = P^{\neq}(N) . P$ où P est la probabilité de transition individuelle du dernier quanton.

. Dans le cas des bosons on a : $P^b(N+1) = (N+1)P^b(N) . P$ (à cause de la factorielle bosonique $N!$)

La probabilité d'obtenir $(N+1)$ bosons dans le même état lorsque N y sont déjà est $(N+1)$ fois supérieure à la probabilité de transition d'un boson isolé. On aura donc $P^b(N+1 \leftarrow N) = (N+1)P$ car $P^b(N+1) = P^b(N+1 \leftarrow N)P^b(N)$. On écrira cette probabilité sous la forme $P^b(N+1 \leftarrow N) = P + NP$, où le terme P correspond à la transition naturelle spontanée et le terme NP décrit une transition provoquée, induite par la présence préalable des N bosons.

- Rayonnement du corps noir. Un corps noir est un corps en équilibre thermodynamique avec le rayonnement électromagnétique qu'il émet et absorbe. On considère une enceinte remplie de photons à la température T, soit ω la pulsation du rayonnement et $N(\omega)$ le nombre moyen de photons dans l'enceinte. On a deux niveaux d'énergie E_f (energie fondamentale) et E_e (energie d'un état excité). On a $E_e - E_g = \hbar\omega$. Si N_g et N_e sont respectivement les nombres d'atomes dans l'état fondamental et dans l'état excité, alors on aura à l'équilibre : $\frac{N_e}{N_g} = \frac{e^{-E_e/kT}}{e^{-E_g/kT}} = e^{-\hbar\omega/kT}$

Le nombre moyen de photons émis est : $N_e (N+1) P$

Le nombre moyen de photons absorbés est : $N_g N P$

P étant la probabilité d'émission par un atome d'un photon isolé.

Donc à l'équilibre on aura $N_g N P = N_e (N+1) P$ d'où $N = \frac{1}{N_g/N_e - 1}$

soit $N(\omega) = \frac{1}{e^{-\hbar\omega/kT} - 1}$

L'énergie contenue dans le rayonnement est $E(\omega) = N(\omega) . \hbar\omega$

La densité d'états est : $\rho(\omega) = \frac{V}{\pi^2 c^3} \omega^2$

La densité volumique et spectrale d'énergie est $u(\omega) = \frac{1}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar\omega^3}{e^{-\hbar\omega/kT} - 1}$

(c'est la formule de Planck)

6) Une nouvelle dualité

Au cours d'un processus physique quel qu'il soit, la parité du nombre de fermions ne peut pas changer. Autrement dit, le nombre de fermions ne peut être modifié que de 2 en 2 : Un fermion ne peut apparaitre ou disparaitre, que si un autre apparait ou disparait. Les bosons, par contre, peuvent apparaitre ou disparaitre en nombre quelconque.

On a les réactions classiques suivantes.

$$e^+_F + n_F \longrightarrow p_F + \bar{\nu}_F$$

$$p_F + \bar{p}_F \longrightarrow e^+_F + e^-_F$$

$$p_F + \bar{p}_F \longrightarrow \pi^+_B + \pi^-_B + \pi^0_B$$

$$e^-_F + p_F \longrightarrow e^-_F + p_F + \gamma_B$$

$$\pi^-_B \longrightarrow e^-_F + \bar{\nu}_F$$

$$\pi^0_B \longrightarrow e^+_F + e^-_F + \gamma_B$$

$$\pi^0_B \longrightarrow \gamma_B + \gamma_B$$

$$p_F + \pi^-_B \longrightarrow e^-_F + e^+_F + n_F$$

Fermions et Bosons

Quantons	Spin
Bosons	
fondamentaux	
Photon γ	1
Gluons	1
Bosons faibles	1
composés	
Méson : π K	0
η, ρ, ω	1
Noyaux de A pair	n (n entier)
Fermions	
fondamentaux	
Leptons : e, μ, ν	1/2
Quarks	1/2
composés	
Baryons :	
nucléons : n, p	1/2
Λ, Σ	1/2
N^*, Y^*	3/2
Noyaux de A impair	$(2n+1)/2$ (n entier)